ＡＢＣ予想とフェルマーの定理を巡って（Ｉ）

$\boxed{1}$ はじめに

新型コロナウィルスへの感染拡大に，不安な毎日を過ごしている人も多いと思います．先が見通せない日々が続きますが，嘆いていても何も始まりません．毎日を大切にし，今，自分にできることに集中した一日一日してください．

さて，そんなコロナ一色のニュースの中で，数学界においてはビッグニュースが飛び込んできました．それは、未解明だった数学の超難問「ABC予想」を証明したとする望月新一・京都大数理解析研究所教授（51）の論文が，欧州数学会が発行する専門誌「PRIMS」（ピーリムズ）に受理されたというものです．ABC予想の証明は，有名な数学の難問「フェルマーの最終定理」（1995年解決）の証明などと並ぶ快挙といわれますが，皆さんはABC予想を知っているでしょうか．ABC予想は，素因数分解と足し算・かけ算との関係性を示す命題のことで，これが証明されると，「フェルマーの最終定理」など他の難問も簡単に導き出すことができるといわれています。

そこで，数学科では，フェルマーの定理とABC予想に関連した話題を，３回にわたって皆さんに紹介したいと思います。臨時休業中に，数学の世界を垣間見てもらえたら嬉しく思います。

$\boxed{2}$ フェルマーの最終定理とは

まずは，フェルマーの最終定理からスタートしましょう。フェルマーの最終定理は，皆さんもよく知っているのではないでしょうか；

$n \geqq 3$ の自然数 n に対して，

$$x^n + y^n = z^n$$

を満たす自然数の組 (x, y, z) は存在しない．

という定理です．もちろん， $n=2$ のときは，有名な三平方の定理です．

$\boxed{3}$ ピタゴラス数を知っていますか

三平方の定理を満たす自然数の組 (x, y, z) は，ピタゴラス数といわれます．例えば， $(3, 4, 5)$ とか， $(5, 12, 13)$ などはいずれもピタゴラス数です．さらに，ピタゴラス数 (x, y, z) のうち最大公約数が 1 のものを，原始ピタゴラス数と呼びます．つまり，

原始ピタゴラス数とは，自然数 x, y, z について，

(i)　$x^2 + y^2 = z^2$

(ii)　x, y, z は互いに素

を満たす自然数の組 (x, y, z) のことである．

例えば， $(3, 4, 5)$ はピタゴラス数ですので， $(6, 8, 10)$ もピタゴラス数になります．大丈夫ですね．しかし， $(3, 4, 5)$ は原始ピタゴラス数ですが， $(6, 8, 10)$ は原始ピタゴラス数ではありません．これは， $6, 8, 10$ が互いに素ではない（最大公約数 2 をもつ）からです．

第1回目は，このピタゴラス数に関連して，次のことを考えてみましょう．

自然数の組 (x, y, z) が正の整数 m, n $(m > n)$ を用いて,

$(x, y, z)=(m^2-n^2, 2mn, m^2+n^2)$ …… $(*)$

で表されるとき，自然数の組 (x, y, z) はピタゴラス数になります．（確かにと納得できますね．）特に，m, n を偶奇の異なる互いに素な正の整数と限定すると，(x, y, z) は原始ピタゴラス数となります．では，この逆（問題）は成り立つのでしょうか．

問題 原始ピタゴラス数 (x, y, z) は，必ず（＊）の形で表すことができる．

これは次のいくつかの補題を用い，（＊）の形に着目すると証明することができます．証明にトライしてみてください．補題の証明は入試基本レベルですよ．

【補題１】 原始ピタゴラス数 (x, y, z) の x, y は，一方が奇数で，もう一方は偶数である．

【補題２】 原始ピタゴラス数 (x, y, z) に対して，$\dfrac{z \pm x}{2}$ はともに整数であり，互いに素である．

フェルマーの定理を巡って（Ⅱ）

4 背理法の利用

背理法とは，ある事柄（命題のことですが）を証明するのに，それが成り立たないと仮定すると，矛盾が生じ，仮定が誤りになるので成り立つとする論法ですね．よく例としてあげられるのが，素数が無限に存在することの証明でしょうか．

$\sqrt{2}$ が無理数であることの証明の方がメジャーでしょうか？

問題　素数が無限に存在することを，背理法によって証明せよ．

5 フェルマーの最終定理で $n=4$ の場合を証明しよう

さて，背理法の一種に無限降下法というものがあります，

「～を満たす最小のものを k とおくと，k より小さい～を満たすものが存在するので矛盾」

というものです．これは整数問題などでよく使われますので，覚えておくといいかもしれません．

この論法を利用すると，フェルマーの最終定理における $n=4$ の場合を証明することができます．もちろん，前回のピタゴラス数の性質を使うのですが，トライしてみましょう．

$x^4+y^4=z^4$ を満たす自然数が存在しないことは，$x^4+y^4=z^2$ を満たす自然数が存在しないことを示せばよいことになります．そこで，

問題　$x^4+y^4=z^2$ を満たす自然数が存在しないことを証明せよ．

ヒント　（1）これを満たす最小の z を考えると矛盾する！？

（2）$(x^2)^2+(y^2)^2=z^2$ と見れば，(x^2, y^2, z) は原始ピタゴラス数ですよね？

フェルマーの定理を巡って（Ⅲ）

$\boxed{6}$ ABC 予想が背理法の利用

さて，ABC予想とは，次のものです.

互いに素な正の整数 A, B について， $A+B=C$ とする.
このとき，任意の正数 ε に対して、

$$C< K\cdot D^{1+\varepsilon} \qquad (K\text{ は } \varepsilon \text{ によって定まる正の定数})$$

が成り立つ.
ただし， D は積 ABC の素因数を 1 つずつ 1 回だけ掛け合わせた数とする
（つまり，素因数分解の指数を取っ払った数）

例えば， $A=8, B=27$ のとき， $C=A+B=8+27=35$ となります. このとき，
$ABC=2^3\times 3^3\times 5\cdot 7$
よって， $D=2\cdot 3\cdot 5\cdot 7=210$ だから，確かに $C< D$ となります.

$\boxed{7}$ ABC 予想とフェルマーの最終定理

上の記述だと，ＡＢＣ予想って何？という感じですが，実は特別な場合として，
$C< D^2$ （ $k=\varepsilon=1$ とした場合）が成り立つと言われています. ここでは，この特別な場合を強い ABC予想と呼ぶことにします. これなら意味が少しはわかってもらえるでしょうか.

さて，これを利用すると，フェルマーの最終定理における $n\geqq 6$ の場合の証明が簡単にできてしまいます. 考えてみませんか.

問題

$n\geqq 3$ の自然数 n に対して，

$$x^n+y^n=z^n$$

を満たす自然数の組 (x, y, z) が存在するとすれば，それは $3\leqq n\leqq 5$ に限られる.

ヒント まず， x, y に 1 より大きい公約数 p がある場合は，両辺 p^n で割って， x, y を互いに素としておきます. それでもいいですよね？