

フェルマーの定理を巡って（Ⅲ） 解答

問題

$n \geq 3$ の自然数 n に対して、

$$x^n + y^n = z^n$$

を満たす自然数の組 (x, y, z) が存在するとすれば、それは $3 \leq n \leq 5$ に限られる。

（証明）

ABC 予想の D を $D(ABC)$ と表すことにする。ここで、 $n \geq 3$ の自然数に対して、 $x^n + y^n = z^n$ を満たす互いに素な正整数解 (x, y, z) が存在しているとする。強い ABC 予想より、

$$\begin{aligned} z^n &< \{D(x^n y^n z^n)\}^2 = \{D(xyz)\}^2 \quad (\ast 4) \\ &\leq (xyz)^2 \\ &< (z^3)^2 = z^6 \end{aligned}$$

今、 x, y, z は自然数であるから、 $z > 1$ であり、 $n < 6$ が得られる。 n は自然数であったから、 $3 \leq n \leq 5$ が成り立つ。

（証明終わり）

※4 ABC 予想の D は指数部分を取っ払ったものであるから、 n 乗を考えなくてよく、

$$D(a^n) = D(a)$$

が成り立ちます。