東京大学 ２０２０年入試問題 理系 第２問

今回は，東京大学の過去問の中でも良問として知られている下記の問題についてです．東大と聞くと難しいんでしょ？と思うかもしれませんが，この問題は中学校の数学をしっかり身につけていれば解けてしまいます．さらに，高校の数学をしっかり身につけている人は，ずば抜けた発想や高度な数学的視点を必要とせず，必然的に解けます．一緒に高校数学の良さを味わってみませんか？

それでは，問題文は以下の通りです．

平面上の点 P, Q, R が同一直線上にないとき，それらを 3 頂点とする三角形の面積を $\triangle PQR$ で表す。また， P, Q, R が同一直線上にあるときは， $\triangle PQR=0$ とする。

A, B, C を平面上の 3 点とし $\triangle ABC=1$ とする。この平面上の点 X が

$$2 \leqq \triangle ABX+\triangle BCX+\triangle CAX \leqq 3$$

を満たしながら動くとき， X の動きうる範囲の面積を求めよ。

一見すると，どのような図を求められているのかイメージしにくいかもしれませんが，分かることを１つずつ描いてみてください．どうしても想像できそうにない人はHPの番外編（数学）に置いてある「東大2020理系第２問 図」の点 X を動かして遊んでみてください．（YouTubeにも考察の動画をアップします．）

さて，問題が理解できたところで，実際に解いてみましょう．解法としては，３通り考えられると思います．初等幾何（中学校数学）・座標・ベクトルです．どの手法でも良いので挑戦してみましょう．もちろん，２通り，３通りと複数の解法にチャレンジするのも良いですよ！！

ヒント（中学校数学）

○平面をいくつかの領域に分割して，場合分けをしてみましょう．

○場合分けごとに， $2 \leqq \triangle ABX+\triangle BCX+\triangle CAX \leqq 3$ を簡単な式に整理してみましょう．

ヒント（座標）

○ $\triangle ABC$ を座標のどこに配置するかが重要です．

○うまく $\triangle ABC$ を配置できれば，直線 AB , BC , CA を方程式で表すのは簡単ですよね？

ヒント（ベクトル）

○平面ベクトルは異なる２つのベクトルの合成で任意のベクトルが表せますよね？

例えば， $\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて， $\overrightarrow{\mathrm{AX}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とできますよね.