東京大学 ２０２０年 入学試験 理系第２問 解答（ベクトル）

<u>解答</u>

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ をそれぞれ $\vec{b}$, $\vec{c}$ とすると，実数 s , t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{AX}}=s\vec{b}+t\vec{c}$ と表せる．また， $\triangle ABC=1$ より，

$$\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{b}|^2|\vec{c}|^2-(\vec{b}\cdot\vec{c})^2}=1$$

$$|\vec{b}|^2|\vec{c}|^2-(\vec{b}\cdot\vec{c})^2=4$$

となるから， $\triangle ABX$ の面積は（非常に計算が重たいですが、、、），

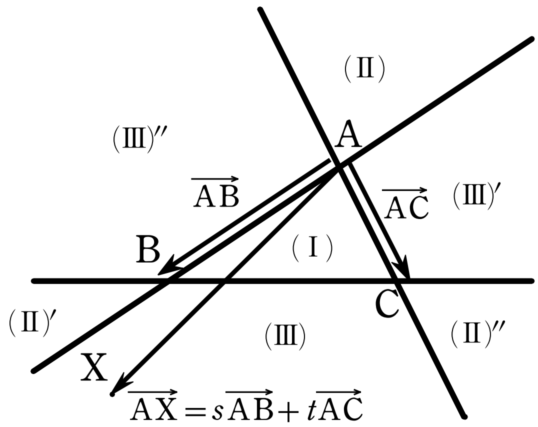
$$\triangle ABX=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{b}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AX}}|^2-(\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AX}})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{4t^2}=|t|$$

同様に， $\triangle BCX$, $\triangle CAX$ の面積はそれぞれ $|1-s-t|$, $|s|$ であり， $S=\triangle ABX+\triangle BCX+\triangle CAX$ とすると，

$$S=|s|+|t|+|1-s-t|$$

となる．ここで，（右図のように）以下の７通りに場合分けする．



（Ⅰ） $s\geqq 0$, $t\geqq 0$, $s+t\leqq 1$

（Ⅱ） $s\leqq 0$, $t\leqq 0$, $s+t\leqq 1$

（Ⅱ）′ $s\geqq 0$, $t\leqq 0$, $s+t\geqq 1$

（Ⅱ）″ $s\leqq 0$, $t\geqq 0$, $s+t\geqq 1$

（Ⅲ） $s\geqq 0$, $t\geqq 0$, $s+t\geqq 1$

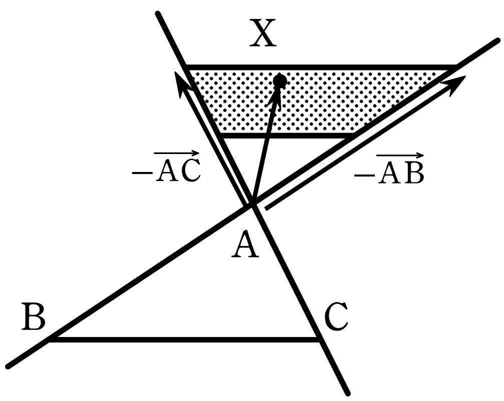
（Ⅲ）′ $s\leqq 0$, $t\geqq 0$, $s+t\leqq 1$

（Ⅲ）″ $s\geqq 0$, $t\leqq 0$, $s+t\leqq 1$

３点 A , B , C の対称性より，（Ⅱ），（Ⅱ）′，（Ⅱ）″ は同等であり，同様に（Ⅲ），（Ⅲ）′，（Ⅲ）″ も同等となるから，以下（Ⅰ），（Ⅱ），（Ⅲ）を確かめる．

（Ⅰ） $t\geqq 0$, $s\geqq 0$, $s+t\leqq 1$ のとき

$S=s+t+1-s-t=1$ となるから，条件 $2\leqq S\leqq 3$ を満たさない．



（Ⅱ） $t\leqq 0$, $s\leqq 0$, $s+t\leqq 1$ のとき

$S=(-s)+(-t)+1-s-t=1-2(s+t)$ であるから，条件は

$$2\leqq S\leqq 3$$

$$2\leqq 1-2(s+t)\leqq 3$$

$$-1\leqq s+t\leqq -\frac{1}{2}$$

となる．したがって，点 X の動き得る範囲の面積は，

$$\frac{1}{2}\sqrt{|-\vec{b}|^2|-\vec{c}|^2-\{(-\vec{b})\cdot(-\vec{c})\}^2}-\frac{1}{2}\sqrt{\left|-\frac{1}{2}\vec{b}\right|^2\left|-\frac{1}{2}\vec{c}\right|^2-\left\{\left(-\frac{1}{2}\vec{b}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\vec{c}\right)\right\}^2}$$

$$=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

（Ⅲ） $t \geqq 0$, $s \geqq 0$, $s+t \geqq 1$ のとき

$S=s+t-(1-s-t)=2(s+t)-1$ より，条件は，

$$2 \leqq S \leqq 3$$
$$2 \leqq 2(s+t)-1 \leqq 3$$
$$\frac{3}{2} \leqq s+t \leqq 2$$

となる．したがって，点 X の動き得る範囲の面積は，

$$\frac{1}{2}\sqrt{|2\vec{b}|^2|2\vec{c}|^2-\{(2\vec{b})\cdot(2\vec{c})\}^2}-\frac{1}{2}\sqrt{\left|\frac{3}{2}\vec{b}\right|^2\left|\frac{3}{2}\vec{c}\right|^2-\left\{\left(\frac{3}{2}\vec{b}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}\vec{c}\right)\right\}^2}$$
$$=4-\frac{9}{4}=\frac{7}{4}$$

以上（Ⅰ）～（Ⅲ）と3点 A , B , C の対称性から，求める面積は，

$$3\cdot\frac{3}{4}+3\cdot\frac{7}{4}=\frac{15}{2}$$

このベクトルでの解法も座標と同様に，ただ面積を求めて絶対値があるから場合分けをし与えられた不等式が成り立つように点 X を求めるというように，偶然思いついた訳でも飛びぬけた発想がある訳でもなく，必然的に解けるはずです．違いがあるとすれば，ベクトルの方が三角形という図形に強かった（向いていた）ということでしょう．それが解答の量に表れていますよね．逆に，多角形や立体図形（立方体や球など）ではなく，２次元グラフや３次元グラフを扱った問題であれば，座標の方が向いていたでしょう．

高校数学は多くの解法を学びます．そうして，問題に対する向き不向きに合わせた解法を用いることで，多くの難しい問題が解けるようになります．どうですか？高校数学って良いでしょう？