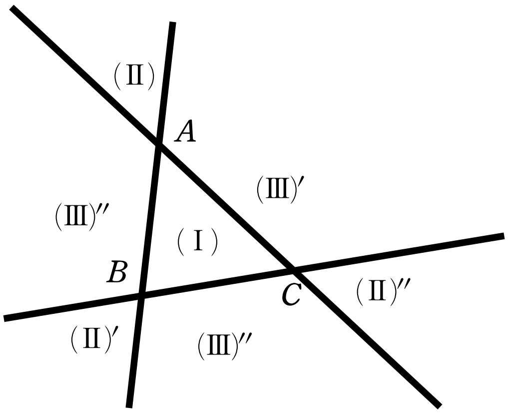
東京大学 ２０２０年 入学試験 理系第２問 解答（中学校数学）

考察



考える平面は次の７つに領域を分割するのが自然でしょうか.
この７つすべてで場合分けするのでは少し面倒です、、、
３点 A, B, C の条件は同一直線上にない程度であり，対称性に着目すれば,
(Ⅱ)′, (Ⅱ)″と(Ⅲ)′, (Ⅲ)″はそれぞれ(Ⅱ)と(Ⅲ)と同一視できますよね？さらに,
(Ⅰ)はすぐに条件を満たさないことが分かりますから，実質(Ⅱ), (Ⅲ)の２つ確認すれば十分でしょう.

解答

(Ⅰ) 点 X が $\triangle ABC$ の周上及び内部にあるとき

$$\triangle ABX+\triangle BCX+\triangle CAX=\triangle ABC=1$$

よって，条件を満たさない.

(Ⅱ) 点 X が直線 AB に対して点 C と反対側，直線 BC に対して点 A と同じ側，直線 CA に対して点 B と反対側の領域とその境界にあるとき
このとき,

$$\triangle BCX=\triangle ABX+\triangle CAX+\triangle ABC$$
$$\triangle ABX+\triangle CAX=\triangle BCX-\triangle ABC$$

より，条件は,

$$2\leqq\triangle ABX+\triangle BCX+\triangle CAX\leqq 3$$
$$2\leqq 2\triangle BCX-\triangle ABC\leqq 3$$
$$\frac{3}{2}\leqq\triangle BCX\leqq 2 \quad \cdots\cdots \text{(i)}$$

となる． $\triangle ABC$ と $\triangle BCX$ は底辺 BC を共有しているから，面積比は高さの比と一致する．ここで，半直線 BA の延長線上に点 D_1 , D_2 を $AD_1=\frac{1}{2}AB$, $AD_2=AB$ となるようにとる．同様に，半直線 CA の延長線上に点 E_1 , E_2 をとると，(i) より，点 X は台形 $D_1D_2E_2E_1$ の周上及び内部を動く． $\triangle ABC$ と $\triangle AD_1E_1$ は相似であり，線分比 $AB:AD_1=2:1$ より， $\triangle AD_1E_1$ の面積は $\frac{1}{4}$ ．また， $\triangle ABC$ と $\triangle AD_2E_2$ は合同であるから，台形 $D_1D_2E_2E_1$ の面積 S は

$$S=\triangle AD_2E_2-\triangle AD_1E_1$$
$$=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

となる.

(Ⅲ) 点 X が直線 AB に対して点 C と同じ側，直線 BC に対して点 A と反対側，直線 CA に対して点 B と同じ側の領域とその境界にあるとき

このとき，

$$\triangle ABX+\triangle CAX=\triangle ABC+\triangle BCX$$

より，条件は，

$$2\leqq\triangle ABX+\triangle BCX+\triangle CAX\leqq 3$$
$$2\leqq 2\triangle BCX+\triangle ABC\leqq 3$$
$$\frac{1}{2}\leqq\triangle BCX\leqq 1 \quad \cdots\cdots \text{(ii)}$$

となる． $\triangle ABC$ と $\triangle BCX$ は底辺 BC を共有しているから，面積比と高さの比が一致する．ここで，半直線 AB の延長線上に点 F_1 , F_2 を $AF_1=\frac{1}{2}AB$, $AF_2=AB$ となるようにとる．同様に，半直線 AC の延長線上に点 G_1 , G_2 をとると， (ii) より，点 X は台形 $F_1F_2G_2G_1$ の周上及び内部を動く． $\triangle ABC$ と $\triangle AF_1G_1$, $\triangle AF_2G_2$ は相似であり，その線分比はそれぞれ， $AB:AF_1=1:\frac{3}{2}$, $AB:AF_2=1:2$ であるから，台形 $F_1F_2G_2G_1$ の面積 T は，

$$\begin{aligned}T&=\triangle AF_2G_2-\triangle AF_1G_1\\&=2^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{7}{4}\end{aligned}$$

となる．

(Ⅱ)′, (Ⅱ)″と(Ⅲ)′, (Ⅲ)″については点 A, B, C の対称性から，それぞれ(Ⅱ)と(Ⅲ)と同じ面積になる．したがって，(Ⅰ)～(Ⅲ)より，求める面積は，

$$\begin{aligned}(\text{Ⅰ})+3\times(\text{Ⅱ})+3\times(\text{Ⅲ})&=0+3\times S+3\times T\\&=3\times\frac{3}{4}+3\times\frac{7}{4}=\frac{15}{2}\end{aligned}$$

（解答終わり）

このように，中学校までに学んだことで東大の問題が解けてしまいます．皆さんは解けましたか？ 惜しくも完答できなかった人もこの解答を読んでみて，どのような感想を持ちましたか？ 私の第一印象は，「数学を解きなれていないと，解法はすぐに思いつかないかな、、、」でした．試験本番では，解答のゴールを見据えて，ゆっくり考えこんでいる時間の余裕はありません．多く見積もっても， 5～10 分程度でしょう．そこで，朗報です！ 高校数学の出番です！次は高校で学ぶ，座標を用いた解法をご紹介します．